ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée I_2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Première partie

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
3. Construire une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ avec $e'_1 \in \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $e'_2 \in \mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. Écrire la matrice D de f dans la base (e'_1, e'_2).
5. En déduire qu'il existe une matrice P, inversible d'ordre 2, telle que $A = PDP^{-1}$; expliciter P et P^{-1}.
6. Pour tout entier naturel non nul n, calculer la matrice D^n puis en déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n et tout réel t, on note $E_n(t)$ la matrice définie par

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

avec la convention $A^0 = I_2$.

Cette matrice sera écrite sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

1. Expliciter les coefficients $a_n(t),\ b_n(t),\ c_n(t)$ et $d_n(t)$ de la matrice $E_n(t)$.
2. (a) Rappeler le développement en série entière da la fonction exponentielle.
   (b) Justifier que les suites $\big(a_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(b_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(c_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(d_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et expliciter leur limites respectives notées $a(t),\ b(t),\ c(t)$ et $d(t)$.

Dans la suite, on pose $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R, éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que

$$E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R.$$

4. (a) Que vaut la matrices $Q + R$? Et la matrice $2Q + 3R$?
   (b) Montrer que, pour tout réel t, $E(t)$ est une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

5. Calculer les matrices $Q^2,\ R^2,\ QR$ et RQ.

6. Montrer que, pour tout couple (s, t) de réels, $E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s)$. En déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.

7. Montrer que l'application $t \longmapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.

Troisième partie

On considère le système (S) d'équations différentielles

$$(S)\ \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

On appelle solution du système (S) tout couple (u, v) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$$

1. Soit (u, v) une solution de (S) ; pour tout réel t, on pose

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer les réels $u_1(t)$ et $v_1(t)$ à l'aide de $u(t)$, $v(t)$ et des coefficients de la matrice $E(-t)$.
   (b) En déduire que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

2. Montrer alors que (u, v) est une solution de (S) si et seulement s'ilexiste un couple (α, β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

SECOND PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels,et ,pour tout entier naturel n, E_n désigne l'ensembles des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle que E est un espace vectoriel réel et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est un sous-espace vectoriel de E.

Enfin, on définit l'application Φ de E vers E qui à tout polynôme P associe le polynôme $Q = \Phi(P)$ défini par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x^2 - 1)P''(x) + 2xP'(x).$$

1. (a) Vérifier que Φ est une application linéaire.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel E_n de E est stable par Φ.
   Dans la suite, on note Φ_n l'endomorphisme de E_n induit par Φ.

2. On pose $\varepsilon_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul k, on note ε_k le polynôme défini par $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon_k(x) = x^k$. On rappelle que la famille $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E_n.

   (a) Calculer $\Phi(\varepsilon_0)$, $\Phi(\varepsilon_1)$ et $\Phi(\varepsilon_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

   (b) Écrire la matrice A_3 de l'endomorphisme Φ_3 relativement à la base $\mathcal{B}_3$.

   (c) Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_3 ?

   (d) L'endomorphisme Φ_3 est-il diagonalisable ?

3. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par U_n le polynôme défini par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad U_n(x) = (x^2 - 1)^n,$$

   et on note P_n le polynôme dérivée n-ième du polynôme U_n : $P_n = (U_n)^{(n)}$. On convient enfin que $U_0 = P_0 = 1$.

   (a) Établir que, pour tout entier naturel n et tout réel x, $\quad (x^2 - 1)U_n'(x) - 2nxU_n(x) = 0$.

   (b) En dérivant $(n + 1)$ fois les deux membres de la relation précédente, montrer que, pour tout entier naturel n, $\quad \Phi(P_n) = n(n + 1)P_n$.

   (c) Montrer alors que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, formée de vecteurs propres de Φ_n. Que peut-on conclure sur Φ_n ?

4. Soit $P \in E$ un polynôme non nul, de degré p et dont le coefficient dominant est noté α_p, $p \in \mathbb{N}$. Soit enfin $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que si $\quad \Phi(P) = n(n + 1)P \quad$ alors $p = n$.

   (b) Ici on prend $p = n$, on écrit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k,\ x \in \mathbb{R}$, et on suppose que $\Phi(P) = n(n+1)P$.

   •Établir que $\alpha_{n-1} = 0$ et trouver une relation entre α_k et α_{k+2}, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$.
   • En déduire, sans les calculer, que tous les coefficients non nul de P s'expriment en fonction de α_n.

   (c) Justifier alors que la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\left(\Phi - n(n + 1)\mathrm{id}_E\right)$, de E, est égale à 1.

FIN DE L'ÉPREUVE